Optimization Problems in Fixed Point Theory

数理解析研究所講究録
747巻 1991年 133-148

Optimization Problems in Fixed Point Theory

東工大理　高橋　渉（Wataru Takahashi）

不動点理論は最適化理論との関連において様々な形で研究され，発展してきた．不動点の存在は写像fのもつ性質と作用する空間Xの性質によって決まってくるが，応用上大切な不動点定理を空間の条件によって分けると，つぎの3つの場合になるだろう．(1) Xが完備距離空間の場合；(2) XがBanach空間の有界凸閉集合の場合；(3) Xが線形位相空間のコンパクト凸集合の場合である．(1)の場合は縮小写像の不動点定理（Banach Contraction Principle）がその代表的なものであり，また最近ではこれを拡張したCaristiの不動点定理[7]がある．これはEkelandのε-variational principle [10]とも"同値"である．これらの定理は距離空間の完備性を目一杯使っている点に特徴があり，最適化理論においてはコンパクト性なしの存在定理を証明するのに有効である．完備距離空間での集合値写像の不動点定理ではBanach Contraction原理を拡張したNadlerの定理[19]がある．この定理が上の定理

（Caristiの定理，Ekeland の定理）から証明されることは興味深いことである．(2)の場合は非拡大写像(nonexpansive mapping）の不動点定理がある．これは1965年にBrowder [4]やKirk [15]，Göhde [13]によって独立に証明されたものであるが，後にこの定理が写像の族の共通不動点定理に拡張され，最小化問題や凸解析学，非線形発展方程式等と結びついて最近のトピックスになっているところである．集合値写像の不動点定理としてはMarkin [18]，Lim [17] 等によって証明された非拡大写像の不動点定理がある．(3)の場合はBrouwerの不動点定理やSchauder，そしてTychonoffの不動点定理がある．これらの定理は様々な形に変形され，最適化理論に応用されている．写像の族に対する不動点定理にはMarkov-Kakutaniの不動点定理 [9] やDayの不動点定理 [8] がある。また集合値写像の不動点定理にはFanの定理やFan-Browderの定理 [6] がある．これらはminimax定理や凸不等式に関する定理などを介在にしてやはり最適化理論を研究する上で重要なものとなる．

ここでは，(1)，(2)の場合に限定して，最適化理論との関連において非線形関数の最小化問題の解の存在とその近似法を考える．(1)では空間に凸性のない（凸関数でない）下半連続関数の最小値定理とその応用について述べる．(2)では

凸関数の最小化問題の解の近似法を一般的な形で考える．1つは凸関数の劣微分を一般化した増大作用素のリゾルベントの漸近的挙動の研究であり，他の1つは非拡大写像エルゴード定理である．これは1967年に証明されたBrowderの強収束定理[5]と1975年にBaillonによって証明された非線形エルゴード定理[1]に端を発するものである．

§1 Nonconvex minimization theorem.

この節では，完備距離空間上で定義された下半連続関数の最小値定理とその応用について述べる．

集合S上で定義され，値を$(-\infty, \infty]$にとる関数fが下に有界であるとは，ある実数Mが存在して

$$M \leqq f(t), \quad {}^{\forall}t \in S$$

となるときをいう．

定理1　Xを完備距離空間とし，fをXから$(-\infty, \infty]$への下半連続で，下に有界な関数とする．このとき，

$$\inf\{f(x) : x \in X\} < f(u)$$

となる$u \in X$に対して，$u \neq v$かつ$f(v) + d(u, v) \leqq f(u)$となる元$v \in X$が存在するなら

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in X\}$$

となる$x_0 \in X$が存在する．

証明　すべてのXの元yに対して，$\inf\{f(x) : x \in X\} < f(y)$

と仮定する．Xの元 u に対し，$u_0=u$ とし，あとは帰納的に u_n $(n=1,2,3,\cdots)$ をつぎのように定義する．u_{n-1} $(n=1,2,\cdots)$ が知られているとし，S_n を

$$S_n=\{w\in X:\ f(w)+d(u_{n-1},w)\leqq f(u_{n-1})\}$$

とし，$u_n\in S_n$ を

$$f(u_n)\leqq \inf_{w\in S_n} f(w)+\frac{1}{2}\{f(u_{n-1})-\inf_{w\in S_n} f(w)\}$$

となるようにとる．このような $u_n\in S_n$ が存在することは

$$\frac{1}{2}\{f(u_{n-1})-\inf_{w\in S_n} f(w)\}>0$$

であるからである．このようにしてつくった点列 $\{u_n\}$ はコーシー列である．実際 $n<m$ とすると

$$\begin{aligned} d(u_n,u_m) &\leqq \sum_{k=n}^{m-1} d(u_k,u_{k+1}) \\ &\leqq \sum_{k=n}^{m-1}\{f(u_k)-f(u_{k+1})\} \\ &= f(u_n)-f(u_m) \qquad \cdots \quad (*) \end{aligned}$$

となる．$\{f(u_n)\}$ は下に有界な減少列であるから収束する．よって $\{u_n\}$ はコーシー列である．$\{u_n\}$ の極限を v とし，$(*)$ で $m\to\infty$ とすると

$$d(u_n,v)\leqq f(u_n)-\lim_{m\to\infty} f(u_m)\leqq f(u_n)-f(v)$$

となる．仮定より，この v に対して，$z \neq v$ で $f(z)+d(z,v) \leqq f(v)$ となる $z \in X$ が存在する．よって

$$
\begin{aligned}
f(z) &\leqq f(v)-d(z,v) \\
&\leqq f(v)-d(z,v)+f(u_n)-f(v)-d(u_n,v) \\
&= f(u_n)-\{d(z,v)+d(u_n,v)\} \\
&\leqq f(u_n)-d(z,u_n).
\end{aligned}
$$

これから $z \in S_{n+1}$．これらはすべての n についていえるので $z \in S_n$ である．

$$2f(u_n)-f(u_{n-1}) \leqq \inf_{w \in S_n} f(w) \leqq f(z)$$

であるので $$f(z) < f(v) \leqq \lim_{n\to\infty} f(u_n) \leqq f(z)$$

を得る．これは矛盾である．よって $f(x_0)=\inf\{f(x) : x \in X\}$ となる $x_0 \in X$ が存在する．

上の定理を用いると，Caristi の不動点定理がただちに得られる．

系（Caristi）　X を完備距離空間とし，f を X から $\mathbb{R}$ への下半連続で，下に有界な関数とする．また T を X から X へのつぎの条件をみたす写像とする．

$$d(x,Tx) \leqq f(x)-f(Tx), \ {}^\forall x \in X.$$

このとき，$Tx_0=x_0$ となる点 $x_0 \in X$ が存在する．

証明　すべての $x \in X$ について，$Tx \neq x$ としよう．このと

き，すべての $x\in X$ について，$x\neq w$ で $f(w)+d(x,w)\leqq f(x)$ となる $w\in X$ が存在することになる．実際，$w=Tx$ とすればよい．上の定理を用いると，$f(x_0)=\inf\{f(x):x\in X\}$ となる $x_0\in X$ が存在する．この $x_0\in X$ に対して

$$0<d(x_0,Tx_0)\leqq f(x_0)-f(Tx_0)\leqq f(Tx_0)-f(Tx_0)=0$$

となり，矛盾を得る．

定理1から，Nadler の不動点定理や nonconvex minimization problems で有用な Ekeland の ε-変分不等式も簡単に証明できる [25]．

§2 収束定理

この節では増大作用素のリゾルベントの収束定理と nonexpansive 半群の非線形エルゴード定理を述べる．

E を Banach 空間とし，I を E 上の恒等写像とする．このとき，$A\subset E\times E$ が増大作用素であるとは，任意の $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ と $r>0$ に対してつねに

$$\|x_1-x_2\|\leqq\|x_1-x_2+r(y_1-y_2)\|$$

が成り立つときをいう．多価写像 A に対して，その定義域および値域は $D(A)$, $R(A)$ で表される．A が増大作用素であるとき，任意の $r>0$ に対して，そのリゾルベントは

$$J_r=(I+rA)^{-1}$$

で定義される．また $A_r=(I-J_r)/r$ は吉田近似といわれる．

よく知られた事実であるが，任意の $x \in R(I+rA)$ に対してつねに $A_r x \in AJ_r x$ が成り立つ．また $x \in D(A) \cap R(I+rA)$ に対してつねに $\|A_r x\| \leqq |Ax|$ である．ただし，

$$|Ax| = \inf\{\|y\| : y \in Ax\}$$

である．任意の $r>0$ に対して，$D(A)$ の閉包 $\overline{D(A)}$ が $R(I+rA)$ に含まれるとき，A は値域条件をみたすといわれる．すべての $r>0$ に対して，$R(I+rA)=E$ であるとき，A は m－増大作用素であるといわれる．C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とするとき，$A=I-T$ は値域条件を満たす増大作用素である．また，H を Hilbert 空間とし，f を H から $(-\infty,\infty]$ への proper で凸な下半連続関数とする．このとき H から H への多価写像 ∂f は

$$\partial f(x) = \{x^* \in H : f(y) \geqq f(x) + (x^*, y-x),\ ^\forall y \in H\}$$

で定義され，f の劣微分といわれる．これは m－増大作用素である．Hilbert 空間上の m－増大作用素 A に対して，初期値問題は，$x \in D(A)$ に対して

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0 \ , \ 0<t<\infty ,$$

$$u(0) = x$$

で定義されるが，これは一意の解 $u : [0,\infty) \to H$ を持つ．いま $x \in D(A)$ と $t \geqq 0$ に対して

$$S(t)x = u(t)$$

で $S(t)$ を定義すると，これは $D(A)$ 上で nonexpansive 写像となり，よって閉凸集合 $\overline{D(A)}$ 上に拡張される．すなわち，$\{S(t)\,;\,t \geq 0\}$ はつぎの条件を満たす $\overline{D(A)}$ 上の nonexpansive 半群になるのである．

(1) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$，$\forall t, s \in [0, \infty)$，$x \in \overline{D(A)}$；

(2) $S(0)x = x$，$\forall x \in \overline{D(A)}$；

(3) 任意の $x \in \overline{D(A)}$ に対して，$t \mapsto S(t)x$ は連続である；

(4) $\|S(t)x - S(t)y\| \leqq \|x - y\|$，$\forall x, y \in \overline{D(A)}$，$t \in [0, \infty)$．

とくに，$A = \partial f$ のときは

$$f(x_0) = \min_{x \in H} f(x) \iff 0 \in \partial f(x_0) \iff x_0 \in \bigcap_{t \geq 0} F(S(t))$$

である．ただし，$F(S(t))$ は $S(t)$ の不動点の集合である．だから凸関数の最小化問題の研究は，増大作用素や nonexpansive 半群の研究となるのである．

$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とし，$\{r_n\}$ を正の実数からなる数列とする．$x_0 \in \bigcap_{r > 0} R(I + rA)$ に対して，つぎの点列を考える．

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n\,,\quad n = 0, 1, 2, \cdots, \qquad \cdots \ (**)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \infty\,.$$

このような点列の挙動の研究は Brezis-Lions [3]，Pazy [20]，Rockafellar [21] 等によって，E が Hilbert 空間の場合に研究されたが，Banach 空間の場合にはつぎのような定理になる．

補助定理　E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．$x_0 \in \bigcap_{r>0} R(I+rA)$ に対して，$\{x_n\}$ を (**) によって定義された点列とすると

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|x_0 - x_n\|}{\sum_{i=0}^{n-1} r_i} = d(0, R(A)) .$$

定理 2（Jung-Takahashi）　E を E^* が Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．$x_0 \in \bigcap_{r>0} R(I+rA)$ に対して，$\{x_n\}$ を (**) によって定義される点列とすると

$$x_n \Big/ \sum_{i=0}^{n-1} r_i$$

は $-u$ に強収束する．ただし，u は $\overline{R(A)}$ の最小ノルムをもつ一意の元である．

証明の概略　点列

$$\{s_n\} = \left\{ x_0 - x_n \Big/ \sum_{i=0}^{n-1} r_i \right\}$$

は有界であり，E は回帰的な Banach 空間であるから，Banach limit μ に対して

$$\mu_n(s_n, x^*) = (u, x^*), \quad {}^\forall x^* \in E^*$$

となる$u \in \overline{co}\{s_n\}$が存在する．この$u$に対して

$$\|u\| = d(0, R(A))$$

が成り立つ．さらにEはstrictly convex Banach空間となるから，$\{s_n\}$の弱収束するような部分列の収束先sはuと一致する．よって$\{s_n\}$はuに弱収束する．さらに補助定理より$\|s_n\| \to \|u\| = d(0, R(A))$であるから，Banach空間$E$の条件（$E^*$はFréchet微分可能なノルムをもつ）を使うと，$\{s_n\}$はuに強収束するということがわかる．

さらにつぎの定理がいえる．

定理3 (Jung-Takahashi)　EをBanach空間とし，$A \subset E \times E$を値域条件を満たす増大作用素とする．$x_0 \in \bigcap_{r>0} R(I+rA)$に対して，$\{x_n\}$を(**)によって定義される点列とすると

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\| / r_n = d(0, R(A)).$$

とくに，$d(0, R(A)) = 0$，$r_n = 1$とし，定理3を用いると

$$J_1^n x - J_1^{n+1} x \to 0$$

となる．CをBanach空間Eの閉凸集合とし，TをCからCへのnonexpansive写像とすると，増大作用素$A = I - T$によってつくられるリゾルベントJ_1は，Cが有界という仮定の下ではnonexpansiveでasymptotically regular写像になるということで

ある．$F(J_1)=F(T)$ であるから，T の不動点の問題は，より強い条件のついた J_1 の不動点の問題となる．

増大作用素 A のリゾルベントの収束定理に関してはつぎの定理もある [24, p.125]．

定理4　E を一様凸で一様Gâteaux微分可能なノルムを持つBanach空間とし，$A\subset E\times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)}\subset C\subset \bigcap_{r>0} R(I+rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0\in R(A)$ ならば，任意の $x\in C$ に対して，$\lim_{t\to\infty} J_t x$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

この定理はBrowderの強収束定理[5]の拡張になっている．実際 C をHilbert空間の閉凸集合とし，T を C から C へのnonexpansive写像で，$F(T)\neq\phi$ となるものとすると，$x_0\in C$ に対し

$$T_n x=\left(1-\frac{1}{n}\right)Tx+\frac{1}{n}x_0$$

で定義される写像 T_n は一意の不動点 u_n をもつ．増大作用素 $A=I-T$ に対して，$J_{n-1}x_0=u_n$ であるから，上の定理より

$$\lim_{n\to\infty} J_n x_0=\lim_{n\to\infty} u_{n+1}\in A^{-1}0=F(T)$$

となる．これでBrowderの強収束定理がいえたことになる．

最後にnonexpansive半群の非線形エルゴード定理について述べる．その前に定義を与えておく．

Sをsemitopological半群（$S=\{0,1,2,\cdots\}$や$S=[0,\infty)$はその例である）とし，$B(S)$をS上の有界実数値関数のつくるBanach空間とする．Xを恒等的に1となる関数eを含む$B(S)$の部分空間とする．$\mu\in X^*$が$\|\mu\|=1=\mu(e)$を満たすとき，μをX上のmeanという．$f\in B(S)$と$a\in S$に対して

$$(l_a f)(t)=f(at),\quad (r_a f)(t)=f(ta)$$

でl_a, r_aを定義し，$B(S)$の部分空間Xは$l_a(X)\subset X$, $r_a(X)\subset X$を満たすものとする。このとき，X上のmeansのnet$\{\mu_\alpha\}$が$f\in X$と$a\in S$に対して

$$\mu_\alpha(f)-\mu_\alpha(l_a f)\to 0,\quad \mu_\alpha(f)-\mu_\alpha(r_a f)\to 0$$

を満たすとき，漸近的に不変であるという．例えば，$S=\{0,1,2,\cdots\}$とし，$x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in B(S)$に対して

$$\mu_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

とすると，$\{\mu_n\}$は$B(S)$上の漸近的に不変なmeansのnetである．S上の有界連続関数fに対して，$a\to r_a f$が連続となるような元fの全体を$RUC(S)$で表すと，$X=RUC(S)$はeを含み，$l_a(X)\subset X$, $r_a(X)\subset X$となるような$B(S)$の部分空間となる．

CをHilbert空間Hの閉部分集合とし，$\{T_t : t\in S\}$をC上のnonexpansive半群とする．いま$\sup_{s\in S}\|T_s x\|<+\infty$とすると，$RUC(S)$上のmean μに対して，Rieszの定理によって

$$\mu_t(T_t x, y) = (x_0, y),\ \forall y\in H$$

となる$x_0\in H$が存在する．xに対して，このx_0を$T_\mu x = x_0$で表すとつぎの定理が成り立つ．

定理5　CをHilbert空間Hの閉集合とする．$\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$を$C$上のnonexpansive半群とし，$\{\mu_\alpha\}$を$RUC(S)$上の漸近的に不変なmeansのnetとする．さらに，Cのある元xに対し，$\{T_t x : t\in S\}$は有界で，$\bigcap_{t\in S}\overline{co}\{T_{ts}x ; s\in S\}\subset C$とする．このとき，$\bigcap_{t\in S}F(T_t)\neq\phi$であり，かつ$T_{\mu_\alpha}x$は$\bigcap_{t\in S}F(T_t)$の元$x_0$に弱収束する．

この定理からBaillonによって得られた非線形エルゴード定理はただちに得られる．

系（Baillon）　CをHilbert空間Hの閉凸集合とし，$\mathfrak{S}=\{S(t) : t\in[0,\infty)\}$を$C$上のnonexpansive半群とする．また，$\bigcap_{t\geq 0}F(S(t))\neq\phi$とする．このとき，任意の$x\in C$に対して

$$S_\lambda x = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$$

は$\bigcap_{t\geq 0}F(S(t))$の元x_0に弱収束する．

References

[1] Baillon, J. B., Un théorème de type ergodic pour les contraction non linéaires dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1511–1514.

[2] Baillon, J. B., Quelques properiétés de convergence asymptotique pour les semigroupes de contractions impaires, C.R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 75–78.

[3] Brezis, H and P. L. Lions, Product infinis de resolvants, Israel J. Math., 29 (1978), 329–345.

[4] Browder, F. E., Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54 (1965), 1041–1044.

[5] Browder, F. E., Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces, Arch. Rat. Mech. Anal., 24 (1967), 82–90.

[6] Browder, F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177 (1968), 283–301.

[7] Caristi, J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241–251.

[8] Day, M. M., Fixed point theorem for compact convex sets, Illinois J. Math., 5 (1961), 585–590.

[9] Dunford, N. and J. T. Schwartz, Linear Operator, I, Interscience New York (1958).

[10] Ekeland, I., Nonconvex minimization problems, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 443–474.

[11] Fan, K., Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205–217.

[12] Fan, K., Extensions of two fixed point theorems of F.E. Browder, Math. Z., 112 (1969), 234–240.

[13] Göhde, D., Über fixedpunkte bei steigen selbstabbildungen mit Kompakten iterierten, Math. Nachr., 27 (1964), 45–55.

[14] Jung, J.S. and W. Takahashi, On the asymptotic behavior of infinite products of resolvents in Banach spaces, to appear.

[15] Kirk, W.A., A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004–1006.

[16] 高村幸男, 小西芳雄, 非線型発展方程式, 岩波講座基礎数学, 岩波書店 (1977).

[17] Lim, T.C., A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1123–1126.

[18] Markin, J.T., A fixed point theorem for set valued mappings, Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 639–640.

[19] Nadler, Jr. S.B., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math., 30 (1969), 475–488.

[20] Pazy, A., Remarks on nonlinear ergodic theory in Hilbert space, Nonlinear Analysis, 3 (1979), 863–871.

[21] Rockafellar, R.T., Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM J. Control and Optimization, 14 (1976), 877–898.

[22] Takahashi, W., Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543–553.

[23] Takahashi, W., A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), 55–58.

[24] 高橋 渉, 非線形関数解析学 — 不動点定理とその周辺 —, 近代科学社 (1988).

[25] Takahashi, W., Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings, to appear in Proceedings of International Conference of Fixed Point Theory and Applications, 1989, Marseille.

[26] Takahashi, W., Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, to appear in Canadian J. Math..